$\boxed{30/05/2016}$

Άσκηση (168): Επαληθεύσετε το Θ. Stokes για την επιφάνεια $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=4,\ z\geq 0\}$ και το δ/κό πεδίο $\bar{f}(x,y,z)=(2y,3x,-z^2)$ με $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3(=V)$

Θ. Stokes: $U\subset\mathbb{R}^2$ ανοικτό, $\bar{\Phi}:U\to\mathbb{R}^3$ C^2 επιφάνεια με παραμ. πεδίο $K\subset U$, K: C^1-καν. χωρίο με θετ. προσ/νο $\partial K=\bar{\gamma}([\alpha,\beta])$, $\bar{\gamma}$: κ. τμήματα C^1 κ' $V\subset\mathbb{R}^3$ ανοικτό με $\bar{\Phi}(K)\subset V$, $\bar{f}:V\to\mathbb{R}^3$ C^1. Τότε:

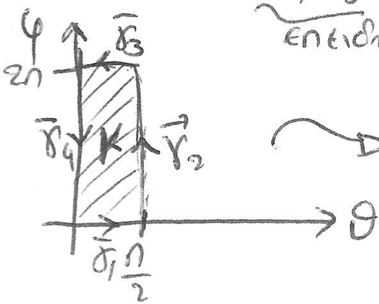
$$\int_{\bar{\Phi}} \bar{\nabla}\times\bar{f}\cdot\bar{n}\,d\sigma=\int_{\bar{\Phi}\circ\bar{\gamma}}\bar{f}\cdot d(x,y,z)$$

με $\bar{\nabla}\times\bar{f}=\begin{vmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}$

Λύση: Πρέπει να βρω $\bar{\Phi}$ τ.ω. $S=\bar{\Phi}(K)$

Είναι $\bar{\Phi}(\theta,\varphi)=r\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}$

με $(\theta,\varphi)\in\underbrace{[0,\tfrac{\pi}{2}]}_{\text{επειδή } z\geq 0}\times[0,2\pi]\Rightarrow K=[0,\tfrac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]$



$\partial K=\bar{\gamma}([\alpha,\beta])=\bar{\gamma}_1\oplus\bar{\gamma}_2\oplus\bar{\gamma}_3\oplus\bar{\gamma}_4$

Είναι: $\bar{\gamma}_1(t)=(t,0),\ t\in[0,\tfrac{\pi}{2}]$ ← παίζει το θ

$\bar{\gamma}_2(t)=(\tfrac{\pi}{2},t),\ t\in[0,2\pi]$ ∼ παίζει το φ.

$\bar{\gamma}_3(t)=(t,2\pi),\ t\in[0,\tfrac{\pi}{2}]$

$\bar{\gamma}_4(t)=(0,t),\ t\in[0,2\pi]$

$\boxed{\bar{\gamma}^-(t)=\bar{\gamma}(\alpha+\beta-t)}$

- $(\bar{\Phi}\circ\bar{\gamma}_1)(t)=2(\sin t,0,\cos t),\ t\in[0,\tfrac{\pi}{2}]$
- $(\bar{\Phi}\circ\bar{\gamma}_2)(t)=(\cos t,\sin t,0),\ t\in[0,2\pi]$
- $(\bar{\Phi}\circ\bar{\gamma}_3)(t)=2(\sin t,0,\cos t),\ t\in[0,\tfrac{\pi}{2}]$

$((\bar{\Phi}\circ\bar{\gamma}_3^-)(t)=\bar{\Phi}(\bar{\gamma}_3^-(t))=\bar{\Phi}(\bar{\gamma}_3(\tfrac{\pi}{2}-t))=(\bar{\Phi}\circ\bar{\gamma}_3)^-(t)$

- $(\bar{\Phi}\circ\bar{\gamma}_4)(t)=2(0,0,1),\ t\in[0,2\pi]$ //

Για επαλήθευση: $I_1=\int_{\bar\Phi} \bar\nabla\times\bar f\cdot\bar n\, d\sigma$, $I_2=\int_{\bar\Phi\circ\gamma} \bar f\cdot d(x,y,z)$

$$I_2=\int_{\bar\Phi\circ\gamma}\bar f\cdot d(x,y,z)=\cancel{\int_{\bar\Phi\circ\gamma_1}\bar f\cdot d(x,y,z)}+\int_{\bar\Phi\circ\gamma_2}\bar f\cdot d(x,y,z)-\cancel{\int_{\bar\Phi\circ\gamma_3}\bar f\cdot d(x,y,z)}-\cancel{\int_{\bar\Phi\circ\gamma_4}\bar f\cdot d(x,y,z)}^{0}=$$

$$=\int_0^{2\pi}\bar f(2\cos t,2\sin t,0)\cdot\underbrace{(-2\sin t,2\cos t,0)}_{\frac{d}{dt}}dt=\int_0^{2\pi}(-8\sin^2 t+12\cos^2 t)dt=-8\pi+12\pi=4\pi$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\pi.}$$

Για το I_1: $\bar\nabla\times\bar f=\begin{vmatrix}\bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\bar\Phi(\theta,\varphi)=2\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{\partial\bar\Phi}{\partial\theta}(\theta,\varphi)=2\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\text{ και }\frac{\partial\bar\Phi}{\partial\varphi}(\theta,\varphi)=2\begin{pmatrix}-\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\bar N(\theta,\varphi)=\frac{\partial\bar\Phi}{\partial\theta}(\theta,\varphi)\times\frac{\partial\bar\Phi}{\partial\varphi}(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}4\sin^2\theta\cos\varphi\\ 4\sin^2\theta\sin\varphi\\ 4\sin\theta\cos\varphi\end{pmatrix}$$

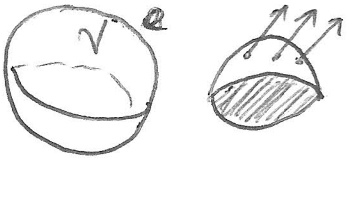
άρα

$$I_1=\int_{\bar\Phi}\bar\nabla\times\bar f\cdot\bar n\,d\sigma=\int_K(\bar\nabla\times\bar f)(\bar\Phi(\theta,\varphi))\cdot\bar N(\theta,\varphi)\,d(\theta,\varphi)=$$

$$=\int_K(0,0,1)\cdot\bar N(\theta,\varphi)\,d(\theta,\varphi)=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}4\sin\theta\cos\theta\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi/2}2\sin(2\theta)\,d\theta\overset{}{\underset{s=2\theta}{=\!=}}2\pi\int_0^{\pi}\sin s\,ds=4\pi$$ (Για Stokes ασκ. 170, 171)

Θεώρημα Gauss



: Έστω $V\subset\mathbb{R}^3$, C^1 καν. χωρίο με ∂V προσανατολισμένο έτσι ώστε το μοναδιαίο κάθετο στο ∂V να δείχνει προς το εξωτερικό του V και $\bar f: W\to\mathbb{R}^3$, με $W\subset\mathbb{R}^3$ ανοικτό και $V\subset W$. Τότε:

$$\int_V\underbrace{\operatorname{div}\bar f}_{\bar\nabla\cdot\bar f=\frac{\partial}{\partial x}f_1+\frac{\partial}{\partial y}f_2+\frac{\partial}{\partial z}f_3}d(x,y,z)=\int_{\partial V}\bar f\cdot\bar n\,d\sigma$$

$\operatorname{div}\bar f=\bar\nabla\cdot\bar f$: απόκλιση $\bar f$
$\operatorname{curl}\bar f=\bar\nabla\times\bar f$: στροβιλισμός $\bar f$
$\int_V\operatorname{div}\bar f\,d(x,y,z)$: ολ/κα επιφ.
$\int_{\partial V}\bar f\cdot\bar n\,d\sigma$: επικ. ολ/κα

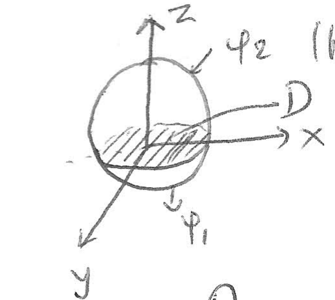
B: κανονικό χωρίο ως προς Oxy:

$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y)\in D\wedge\varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)\}$

όπου $D\subset\mathbb{R}^2$: συμπαγές κ' J-μετρ. και $\varphi_1,\varphi_2: D\to\mathbb{R}$ συνεχείς

π.χ. Η μπάλα $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\le R^2\}$ $R\ge0$, με $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le R^2\}$ είναι καν. χωρίο ως προς Oxy αφού D: συμπαγές κ' J-μετρ. και $-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

B: καν. χωρίο στον $\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow$ B: καν. χωρίο ως προς Oxy, Oyz, Oxz.



σφαίρα (μόνο η επιφάνεια χωρίς το εσωτερικό)

$$\partial S = \overbrace{\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D \wedge z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\}}^{S^+ \text{ (άνω ημισφαίριο)}} \cup$$
$$\cup \underbrace{\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D \wedge z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\}}_{S_- \text{ (κάτω ημισφαίριο)}}$$

Ποιο θα είναι το $\bar N(x,y) = ?$

– Το $\bar N(x,y)$ σε γραφήματα είναι πάντα προς τα πάνω γιατί:

$$\bar\Phi(x,y)=\begin{pmatrix}x\\y\\f(x,y)\end{pmatrix} \to \bar N(x,y) = \begin{pmatrix}-\partial f/\partial x\\-\partial f/\partial y\\1>0\end{pmatrix}$$

Τα S^+, S_- είναι γραφήματα επιφ. άρα το $\bar N(x,y)$ είναι προς τα πάνω

Ορισμός: Ένα καν. χωρίο ως προς Oxy ονομάζεται C^1 καν. χωρίο ως προς Oxy αν: (i) $\partial B = \bar\gamma([\alpha,\beta])$ με $\bar\gamma$: κατά τμ. C^1 καν. καμπύλη

(ii) το "ταβάνι" $\{(x,y,\varphi_2(x,y)) : (x,y)\in D\}$ και το "πάτωμα" $\{(x,y,\varphi_1(x,y)) : (x,y)\in D\}$ μπορούν να παραμετρικοποιηθούν ως επιφ. με μοναδιαίο κάθετο που δείχνει στο εξωτερικό του B.

π.χ. Έστω $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} = \bar\gamma([0,2\pi])$ με $\bar\gamma(t)=(\cos t, \sin t)$ και $\varphi_1(x,y)=-h$, $\varphi_2(x,y)=h$, $h>0$ με φ_1, φ_2 συν. διαφ. και μάλιστα γραφήματα άρα το μον. κάθετο είναι προς τα πάνω.

Άσκηση 172: Έστω $S\subset\mathbb{R}^3$ η σφαίρα κέντρου $(0,0,0)$ και $R>0$ και $\vec n$ το μοναδιαίο κάθετο στην S. Επαληθεύστε το Θ. Gauss με $\bar f(x,y,z)=(x^3,y^3,z^3)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Λύση: Η μπάλα $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -\sqrt{R^2-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2} : (x,y)\in D\}$ με $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le R^2\}$. Το B είναι καν. χωρίο ως προς τα επίπεδα Oxy, Oxz, Oyz και $\partial B = S_0 = \bar\Phi(\underbrace{[0,\pi]\times[0,2\pi]}_{K})$

και $\bar\Phi(\theta,\varphi)=R\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\\sin\theta\sin\varphi\\\cos\theta\end{pmatrix} \Rightarrow \bar N(\theta,\varphi)=\left(\frac{\partial\bar\Phi}{\partial\theta}\times\frac{\partial\bar\Phi}{\partial\varphi}\right)(\theta,\varphi) = R^2\sin\theta\,\bar\Phi(\theta,\varphi)$

$(\theta,\varphi)\in K$.

Το $\bar N$ δείχνει πάντα προς το εξ. της μπάλας (στο βόρειο κ' στο νότιο πόλο $=0$).

Το Θ. Gauss εφαρμόζεται στη μπάλα B/σφαίρα ∂B

$$\underbrace{\int_B \bar\nabla\cdot\bar f}_{I_1} = \underbrace{\int_{\partial B}\bar f\cdot\bar n\,d\sigma}_{I_2}$$

$$I_1=\int_B(3x^2+3y^2+3z^2)\,d(x,y,z) = 3\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\, r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr =$$
$$= 3\cdot 2\pi\Big(\underbrace{\int_0^R r^4\,dr}_{R^5/5}\Big)\cdot\Big(\underbrace{\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta}_{2}\Big) = \frac{12\pi R^5}{5}$$

με $\bar F(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$, $r\in[0,R]$, $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi]$.

$$I_2 = \int_{\bar\Phi} (x^3,y^3,z^3)\cdot\bar n\, d\sigma = R^3 \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} (\sin^3\theta\cos^3\varphi, \sin^3\theta\sin^2\varphi, \cos^3\theta)\cdot \underbrace{\bar N(\theta,\varphi)}_{R^2\sin\theta\,\bar\Phi(\theta,\varphi)}\, d(\theta,\varphi) =$$

$$= R^5 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\sin^5\theta\cos^4\varphi + \sin^5\theta\sin^4\varphi + \cos^4\theta\sin\theta)\, d\varphi\, d\theta$$

- Πως μπορώ να υπολ. τον όγκο ενός $V\subset\mathbb{R}^3$ για το οποίο ισχύει το Θ.Gauss? (μέσω του υπολ. κάποιου δίκού πεδίου στο ∂V).

$$\int_V \bar\nabla\cdot\bar f \underbrace{(=1)}_{\text{υπολ}} = \int_{\partial V} \bar f\cdot\bar n\, d\sigma$$

$$\bar\nabla\cdot f = \frac{\partial}{\partial x}f_1 + \frac{\partial}{\partial y}f_2 + \frac{\partial}{\partial z}f_3 \quad // \text{π.χ. } f(x,y,z) = \frac{1}{3}(x,y,z)$$

<u>Άσκηση (173)</u>: Να υπολ. το $\int_S (4xz, y^2, yz)\cdot\bar n\, d\sigma$ με Gauss όπου

S: η επιφάνεια του κύβου $[0,1]^3 (=[0,1]\times[0,1]\times[0,1])$

<u>Λύση</u>: Είναι: $[0,1]^3 = K = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : [x,y]\in[0,1]^2 \wedge \overset{\varphi_1(x,y)}{0} \le z \le \overset{\varphi_2(x,y)}{1}\}$

άρα ο κύβος είναι C^1 κατ. χωρίο στον $\mathbb{R}^3$ (ισχύει το ίδιο για x κ' y).

Το "ταβάνι" μπορώ να το παραμ. με $(x,y)\in[0,1]^2 = K_1$ και $\bar\Phi_2(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ με μοναδιαίο κάθετο $\bar N_2(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και το "πάτωμα" με $(x,y)\in K_1$ και $\bar\Phi_1(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial\bar\Phi_1}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial\bar\Phi_2}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar N_1(x,y) = \frac{\partial\bar\Phi_1}{\partial x} \times \frac{\partial\bar\Phi_2}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα $I \overset{Gauss}{=} \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (4z - 2y + y)\,dx\,dy\,dz = \dots = \frac{3}{2}$

Άσκηση (174)